Дифференциальное уравнение (ДУ) – это уравнение, содержащее производные функции y(x), саму функцию, независимые переменные и иные параметры в различных комбинациях.

Существует множество видов дифференциальных уравнений: обыкновенные дифференциальные уравнения, линейные и нелинейные, однородные и неоднородные, дифференциальные уравнения первого и высших порядков, дифуры в частных производных и так далее.

Решением дифференциального уравнения является функция, которая обращает его в тождество. Существуют общие и частные решения ДУ.

Общим решением ДУ является общее множество решений, обращающих уравнение в тождество. Частным решением дифференциального уравнения называется решение, удовлетворяющее дополнительным условиям, заданным изначально.

Порядок дифференциального уравнения определяется наивысшим порядком производных, входящих в него.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения – это уравнения, содержащие одну независимую переменную.

Рассмотрим простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Оно имеет вид:

$$y'(x) = f(x)$$

Решить такое уравнение можно, просто проинтегрировав его правую часть.

Примеры таких уравнений:

$$y'(x) = 0$$

$$y'(x) = x + e^{x} - 1$$

Уравнения с разделяющимися переменными

В общем виде этот тип уравнений выглядит так:

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

Приведем пример:

$$2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2)$$

Решая такое уравнение, нужно разделить переменные, приведя его к виду:

$$\frac{y'(x)}{g(y)} = f(x)$$

После этого останется проинтегрировать обе части и получить решение.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Такие уравнения имеют вид:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Здесь p(x) и q(x) – некоторые функции независимой переменной, а y=y(x) – искомая функция.
Приведем пример такого уравнения:

$$y' - \frac{2xy}{1+x} = 1 + x^2$$

Решая такое уравнение, чаще всего используют метод вариации произвольной постоянной либо представляют искомую функцию в виде произведения двух других функций y(x)=u(x)v(x).

Для решения таких уравнений необходима определенная подготовка и взять их “с наскока” будет довольно сложно.

Пример решения ДУ с разделяющимися переменными

Вот мы и рассмотрели простейшие типы ДУ. Теперь разберем решение одного из них. Пусть это будет уравнение с разделяющимися переменными.

$$2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2)$$

Сначала перепишем производную в более привычном виде:

$$2x\sqrt{1-y^2} = \frac{dy}{dx}(1+x^2)$$

Затем разделим переменные, то есть в одной части уравнения соберем все "игреки", а в другой – "иксы":

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2xdx}{1+x^2}$$

Теперь осталось проинтегрировать обе части:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{2xdx}{1+x^2}$$

Интегрируем и получаем общее решение данного уравнения:

$$\arcsin y = \ln(1+x^2) + C$$