Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.

Показательные уравнения

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$. Эта функция определена при любых x, и всегда положительна.

Свойства степенней действительных чисел:

1. $a^n a^m = a^{n+m}$;

2. $a_1{}^m a_2{}^m = (a_1 a_2)^m$;

3. $(a^n)^m = a^{nm}$;

4. $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^m = \frac{a_1{}^m}{a_2{}^m}$, если $a_2 \neq 0$;

5. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, если $n > m, a \neq 0$.

ПРИМЕР 1: **Решить уравнение**

$$\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}} = \frac{0{,}04^x}{25}.$$

Решение: Преобразуем данное уравнение:

$$\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}} = \frac{0{,}04^x}{25},$$

$$\frac{(5^{-1})^{x+0{,}5}}{5^{0{,}5}} = \frac{(5^{-2})^x}{5^2},$$

$$5^{-x-1} = 5^{-2x-2} \iff -x-1 = -2x-2, x = -1.$$

Ответ: $x = -1$.

ПРИМЕР 2: **Решить уравнение** $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$.

Решение: Преобразуем данное уравнение, используя свойства степеней:

$$(2^x)^2 - \frac{10}{2} 2^x = 24.$$

Введем новую переменную $a = 2^x, a > 0.$

$$a^2 - 5a - 24 = 0,$$

$$D = 121, \qquad a = \frac{5 \pm 11}{2}, \qquad a_1 = -3, a_2 = 8.$$

Корень $a_1 = -3$, не удовлетворяет условию $a > 0$, поэтому единственное решение исходного уравнения определяется из соотношения

$$2^x = 8, x = 3.$$

Ответ: $x = 3.$

Показательные неравенства

При решении показательных неравенств надо учитывать, что показательная функция $y = a^x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при

$0 < a < 1$.

Неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при $a > 1$ равносильно неравенству

$$f(x) > g(x).$$

Неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при $0 < a < 1$ равносильно неравенству

$$f(x) < g(x).$$

ПРИМЕР 3: **Решить неравенство** $2^{3-6x} > 1$.

Решение: Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$3 - 6x > 0, \qquad \text{откуда } x > \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.

ПРИМЕР 4: **Решить неравенство** $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

Решение: Введем новую переменную

$$a = 5^x, a > 0.$$

Исходное уравнение примет вид:

$5a^2 - a - 4 > 0.$

Решением полученного неравенства является множество

$a \in (-\infty; -0{,}8) \cup (1; \infty).$

С учетом условия $a > 0$ получаем $a > 1$. Следовательно, $5^x > 1$, откуда $x > 0$.

Ответ: $x \in (1; \infty)$.

Логарифмические уравнения

Логарифмом числа $x\,(x > 0)$ по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется показатель степени y, в которую надо возвести a, чтобы получить x.

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

Основные свойства логарифмов

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y;$
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$
3. $\log_a x^n = n \log_a x;$
4. $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x;$
5. $\log_{a^m} x^m = \log_a x;$
6. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;
7. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$;
8. Если $\log_a x = \log_a y$, то $x = y$ и обратно;
9. Если $a > 0$, то $\log_a x < \log_a y \iff x < y$;
10. Если $0 < a < 1$, то $\log_a x < \log_a y \iff x > y$.

***ПРИМЕР 5:* Решить уравнение** $\log_2 x^2 = 4.$

Решение: Воспользовавшись формулой логарифма степени, перепишем исходное уравнение в виде $2\log_2 x = 4,$ откуда

$\log_2 x = 2,$ в соответствии с определением логарифма получаем $x = 4$.

Но значение $x = -4$, так же удовлетворяет исходному уравнению. Потеря корня $x = -4$, произошла при неравносильном переходе от логарифма степени к удвоенному логарифму.

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = -4.$

***ПРИМЕР 6:* Решить уравнение** $\log_3(1 + \log_3(2^x - 7)) = 1$.

Решение: В соответствии с определением логарифма получаем:

$$1 + \log_3(2^x - 7) = 3^1, \quad \log_3(2^x - 7) = 2, \ 2^x - 7 = 9, \ 2^x = 16, x = 4.$$

Ответ: $x = 4$.

Логарифмические неравенства

Неравенство

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

при $a > 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ – системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Приведенные выше логарифмические неравенства обобщаются на логарифмические неравенства с переменным основанием.

Неравенство
$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

Равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ 0 < a(x) < 1. \end{cases}\end{array}\right.$$

ПРИМЕР 7: **Решить неравенство**

$$\log_{\frac{1}{3}}(5x - 1) > 0.$$

Решение: Представим правую часть в виде $\log_{\frac{1}{3}} 1$. Основание логарифма меньше единицы, значит, при потенцировании знак неравенства следует изменить. Получаем неравенство:

$$5x - 1 < 1.$$

Необходимо записать условие, при котором оно существует, получаем систему:

$$\begin{cases} 5x - 1 < 1, \\ 5x - 1 > 0. \end{cases}$$

Решив систему, находим $\frac{1}{5} < x < \frac{2}{5}$.

Ответ: $\frac{1}{5} < x < \frac{2}{5}$.

ПРИМЕР 8: **Решить неравенство**

$$2\log_5 x - \log_x 125 < 1.$$

Решение: Произведем преобразования:

$$2\log_5 x - \log_x 125 < 1 \;<=>\; 2\log_5 x - \frac{3}{\log_5 x} < 1.$$

Введем новую переменную $a = \log_5 x$. Исходное неравенство запишем в виде:

$$2a - \frac{3}{a} - 1 < 0, \;\; \frac{2a^2 - a - 3}{a} < 0(*).$$

Неравенство (*) можно решать, перейдя к совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a^2-a-3<0,\\ a>0,\end{cases}\\ \begin{cases}2a^2-a-3>0,\\ a<0.\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<a<\frac{3}{2},\\ a>0,\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{3}{2};\infty\right),\\ a<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}0<a<\frac{2}{3},\\ a<-1.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$x\in\left(0;\frac{1}{5}\right)\cup\left(1;\sqrt{125}\right).$$

Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{5}\right)\cup\left(1;\sqrt{125}\right).$

ПРИМЕР 9: **Решить неравенство**

$$\log_{2x+3}x^2<1.$$

Решение: Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+3>1,\\ x^2<2x+3,\\ x^2>0,\end{cases}\\ \begin{cases}0<2x+3<1,\\ x^2>2x+3.\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-1,\\ -1<x<3,\\ \left[\begin{array}{l}x<0,\\ x>0,\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}-\frac{3}{2}<x<-1,\\ \left[\begin{array}{l}x<-1,\\ x>3,\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x\in(-1;0)\cup(0;3),\\ x\in\left(-\frac{3}{2};-1\right).\end{array}\right.$$

Получаем: $x\in\left(-\frac{3}{2};-1\right)\cup(-1;0)\cup(0;3).$

Ответ: $x\in\left(-\frac{3}{2};-1\right)\cup(-1;0)\cup(0;3).$