Язык теории множеств. Множество — одно из основных понятий современной математики, с которым каждый человек знаком со школьной скамьи. «Множество решений уравнения или неравенства», «множество точек на плоскости», «множество действительных чисел» и т.д. — привычные словосочетания, не требующие дополнительных рассуждений и определений.

Множество считается **заданным**, если или *перечислены* все его элементы, или *указано свойство*, которым обладают те и только те элементы, которые принадлежат данному множеству. Первый вариант будем записывать так: $M = \{m_1, m_2, ..., m_k\}$, например, $M = \{0, 1\}$. Последний вариант будем записывать так: $M = \{b | P(b)\}$. Такая запись читается как: M состоит из тех (всех) элементов b, которые обладают признаком P. Например, $M = \{n \,|\, n \in \mathbb{N},\ n < 5\}$ означает: M составляют только те натуральные числа, что меньше пяти. Само свойство P будем называть **характеристическим**.

Если множество не содержит элементов, обладающих характеристическим признаком, то оно называется **пустым** и обозначается $\varnothing$.

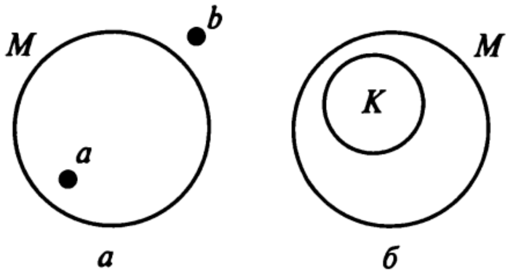


Рис. 1.1. Иллюстрация кругами Эйлера:

а — элемент *a* принадлежит множеству *M*, элемент *b* не принадлежит множеству *M*; *б* — подмножество *K* множества *M*

Изображение множеств. Множества удобно изображать с помощью *кругов Эйлера* (диаграмм Венна). Элементы множества изображаются точками внутри круга, если они принадлежат множеству ($a \in M$ на рис. 1.1, *а*), и точками вне круга, если они множеству не принадлежат ($b \notin M$).

Из множества M можно выделить его часть (также выделением нового характеристического свойства или перечислением элементов) — множество K, все элементы которого обладают таким же признаком, как и элементы множества M. Множество K называют **подмножеством** множества M и обозначают $K \subset M$ (рис. 1.1, *б*). Более строго: множество K называется **подмножеством** множества M ($K \subset M$), если для любого $x \in K$ выполняется $x \in M$ (т.е. $\forall x \in K$ влечет $x \in M$).

Также необходимо учитывать различие в употреблении знаков *включения* ($\subset$) и *принадлежности* ($\in$) для множества множеств.

Универсальным называют множество U, состоящее из всех возможных элементов, обладающих данным признаком. Например,

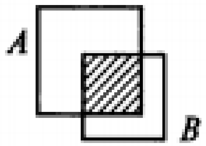
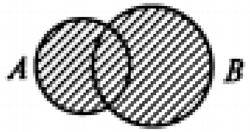
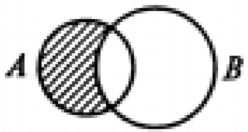
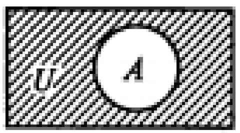
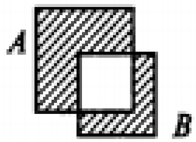
множество планет Солнечной системы U = {Земля, Марс, Венера, Юпитер, Сатурн, Уран, Плутон, Меркурий, Нептун}. Заметим, что понятие универсального множества четко не определено, т.е. некорректно. U можно включить в другое множество W, и оно тоже будет универсальным. Например, долго считалось, что множество действительных чисел $\mathbb{R}$ универсально (т.е. описывает всю математику), пока не открыли поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ и надкомплексные числа и не поняли, что не существует универсального числового множества. Тем не менее там, где область объектов не выходит за рамки некоего множества, иногда бывает удобно оперировать с этим термином. Ведь ржаное поле — вселенная для мыши.

Равными называют два множества A и B, состоящие из одинаковых элементов: $A = B$. Например, равны множества решений уравнений $4x - 8 = 16$, $x/15 = 2/5$ и $5^{x-3} = 125$, так как их решением является одно и то же число 6.

Равенство двух множеств A и B означает также, что $A \subset B$ и $B \subset A$. И наоборот, выполнение свойств $A \subset B$ и $B \subset A$ означает выполнение равенства $A = B$. Эти утверждения равносильны.

Число элементов множества A называется **мощностью** множества и обозначается $|A|$ или $n(A)$. Так, мощность пустого множества равна 0: $n(\varnothing) = 0$, а мощность множества планет Солнечной системы $n(U) = 9$ или $|U| = 9$.

Основные операции над множествами

Название операции	Обозначение	Изображение кругами Эйлера	Определение	Символическая запись
Пересечение множеств	$A \cap B$		Те и только те элементы, которые принадлежат *одновременно* A и B	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$
Объединение множеств	$A \cup B$		Те и только те элементы, которые принадлежат *хотя бы одному* из множеств A и B	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$
Разность множеств	$A \setminus B$		Те и только те элементы множества A, которые *не* принадлежат B	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$
Дополнение к множеству A	$\overline{A} = A' = U \setminus A$		Те и только те элементы, которые *не* принадлежат множеству A (т.е. дополняют его до универсального U)	$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A$
Симметрическая разность	$A \Delta B$		Те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств: A *либо* B, но не являются общими элементами	$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$