Графы и операци над ними

Впервые понятие «граф» ввел в 1936 г. венгерский математик Денни Кёниг. Но первая работа по теории графов принадлежала перу великого Леонарда Эйлера и была написана еще в 1736 г. С помощью графов изображаются схемы различных дорог, линии воздушных сообщений, газопроводов, теплотрасс, электросетей, а также микросхемы, дискретные многошаговые процессы, системы различных бинарных отношений, химические структурные формулы и другие диаграммы и схемы. Применяются графы для решения задач химии, экономики, электротехники и автоматики. Также они широко используются в информатике и строительстве. Без графов сложно анализировать классификации в различных науках.

Графом $G = (V, X)$ называется пара двух конечных множеств: множество точек и множество линий, соединяющих некоторые пары точек. В терминах декартова произведения (подразд. 1.5) множество

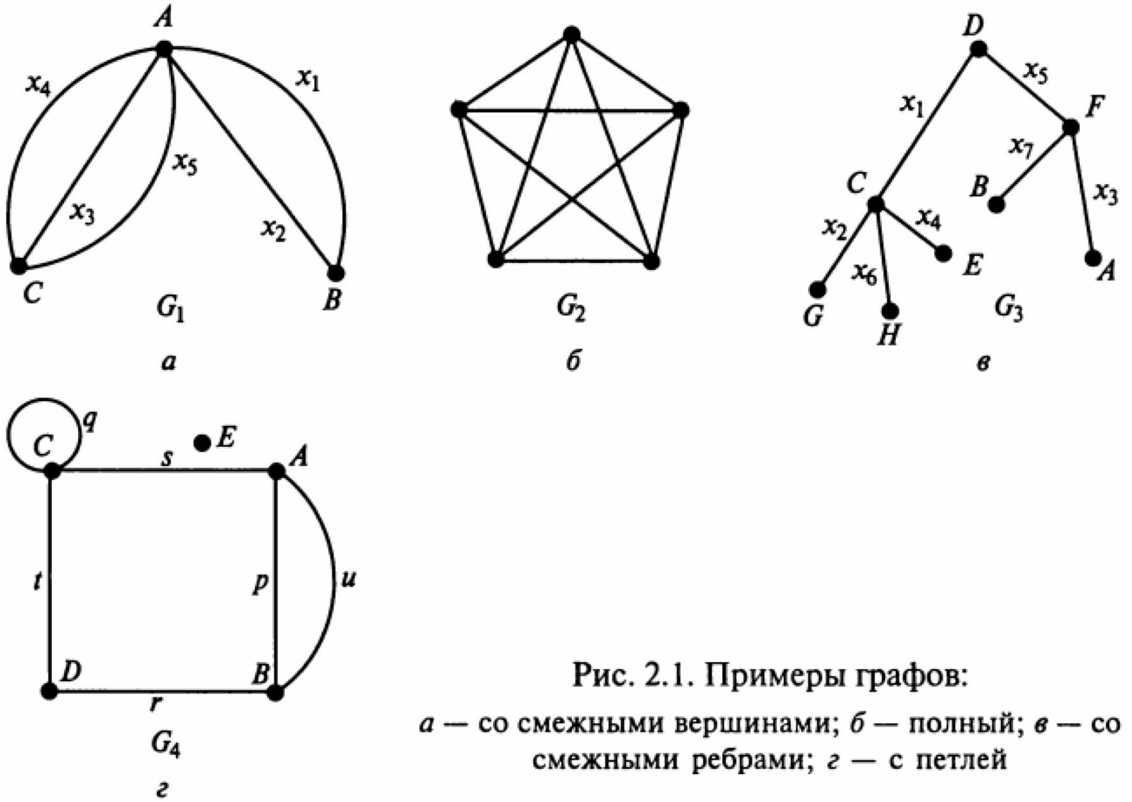

Рис. 2.1. Примеры графов:

а — со смежными вершинами; *б* — полный; *в* — со смежными ребрами; *г* — с петлей

линий X, соединяющее пару точек, — это некоторое подмножество множества $V \times V$: $X \subset (V \times V)$.

линий X, соединяющее пару точек, — это некоторое подмножество множества $V \times V$: $X \subset (V \times V)$.

Точки называются **вершинами**, или **узлами**, графа, линии — **ребрами** графа. Примеры графов приведены на рис. 2.1.

Пусть дан граф $G = (V, X)$, где $V = \{V, W, ...\}$ — конечное непустое множество его вершин, а $X(V, W)$ — его ребра. Если ребро графа G соединяет две его вершины V и W (т. е. $\langle V, W \rangle \in X$), то говорят, что это ребро им **инцидентно**. Две вершины графа называются **смежными**, если существует инцидентное им ребро: на рис. 2.1, *а* смежными являются вершины A и B, A и C. Если граф G имеет ребро $X(V, V)$, у которого начало и конец совпадают, то это ребро называется **петлей.** На рис. 2.1, *г* петля — $q(C, C)$. Два ребра называются **смежными**, если они имеют общую вершину. На рис. 2.1, *в* смежными являются, например, ребра x_1 и x_2 с общей вершиной C.

Граф $G(V, X)$ может иметь ребра с одинаковыми парами вида $X(V, W)$. Такие ребра называются **кратными**, или **параллельными**. На рис. 2.1, *а* кратными являются, например, ребра $x_1(A, B)$, $x_2(A, B)$. Вершинам A и B инцидентны ребра x_1, x_2, x_3. Количество одинаковых пар вида $x(V, W)$ называется **кратностью** ребра (V, W). На рис. 2.1, *а* ребро AC имеет кратность, равную 3, а ребро AB — кратность, равную 2. Число ребер, инцидентных вершине A, называется **степенью** этой вершины и обозначается $\deg(A)$ (от англ. *degree* — степень). Если вершине инцидентна петля, она дает вклад в степень, равный двум, так как оба конца приходят в эту вершину.

На рис. 2.1, *в* вершина A имеет степень, равную 1, вершина C — 4, вершина D — 2. Записывается это в виде: $\deg(A) = 1$, $\deg(C) = 4$, $\deg(D) = 2$. Граф G_4 (рис. 2.1, *г*) содержит четыре вершины $V = \{A, B, C, D\}$ и шесть ребер $X = \{p, q, r, s, t, u\}$.

Вершина графа, имеющая степень, равную нулю, называется **изолированной**. Граф, состоящий из изолированных вершин, называется **нуль-графом**. Для нуль-графа $X = \varnothing$. Вершина графа, имеющая степень, равную 1, называется **висячей**. На рис. 2.1, *г* вершина E — изолированная: $\deg(E) = 0$, а вершины A, B, E, G, H на рис. 2.1, *в* — висячие.

2.2. Операции над графами

Объединением графов $G_1 = (V_1,\ X_1)$ и $G_2 = (V_2,\ X_2)$ называется граф $G = G_1 \cup G_2$, множество вершин которого $V = V_1 \cup V_2$, а множество ребер $X = X_1 \cup X_2$.

Пересечением графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 \cap G_2$, для которого $X = X_1 \cap X_2$ — множество ребер, а $V = V_1 \cap V_2$ — множество вершин.

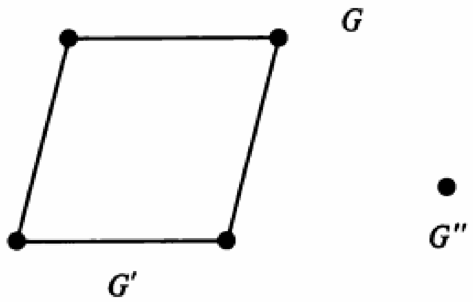

Рис. 2.13. Несвязный граф G с двумя компонентами связности G' и G''

Подграфом графа $G = (V,\ X)$ называется граф $G_1 = (V_1,\ X_1)$, все вершины и ребра которого являются подмножествами множества вершин и ребер графа G. Обозначения такие же, как и для множеств: $G_1 \subset G$, если $V_1 \subset V$, $X_1 \subset X$. Отметим, что не любая пара $(V_1,\ X_1)$, где $V_1 \subset V$, $X_1 \subset X$, будет являться подграфом. Для этого еще необходимо, чтобы она являлась графом, т.е. $X_1 \subset \{(V_i,\ V_j) \mid V_i,\ V_j \in V_1\}$. В противном случае у подграфа могло появиться ребро, не инцидентное ни одной его вершине.

Кольцевой суммой двух графов называется граф $G = G_1 \oplus G_2$, порожденный множеством вершин $V = V_1 \cup V_2$ и множеством ребер $(X_1 \cup X_2) \backslash (X_1 \cap X_2)$, т.е. множеством ребер, содержащихся либо в G_1, либо в G_2, но не в $G_1 \cap G_2$.